九年级海选 A 卷答案

一．填空题（每题 5 分，共计 50 分）

1. $\frac{2+\sqrt{10}}{2},\frac{2-\sqrt{10}}{2}$　　2. -1　　3. 12　　4. $\sqrt{601}$ 或 5　　5. $\frac{3}{2}$

6. $\frac{2\pm3\sqrt{2}}{2},1\pm\sqrt{5}$　　7. $3\times(\frac{1}{2})^{n-1}$　　8. $3\sqrt{5}$　　9. 3992,3997　　10. $\frac{11}{18}$

二．计算题(每题 6 分，共计 12 分)

11．解：$\because x_1,x_2$ 是方程 $x^2+x-3=0$ 的两个实数根，

$\therefore$ 根据韦达定理可得 $x_1+x_2=-1$．　　………………………… 1 分

又$\because$ $x_1^5=x_1\cdot x_1^2\cdot x_1^2=x_1\cdot(3-x_1)\cdot(3-x_1)=9\cdot x_1-6\cdot x_1^2+x_1^3=9\cdot x_1-6\cdot(3-x_1)+x_1\cdot x_1^2$

$=9\cdot x_1-6\cdot(3-x_1)+x_1\cdot(3-x_1)=9\cdot x_1-18+6\cdot x_1+3\cdot x_1-(3-x_1)=19x_1-21$

$x_2^2=3-x_2$，　　………………………… 3 分

$\therefore x_1^5-19x_2^2+21=19x_1-21-19(3-x_2)+21=-76$．　　………………………… 2 分

12．解：由 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})+c(\frac{1}{b}+\frac{1}{a})=-3.$ 那么 $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=0,$

………………………… 2 分

$\therefore a+b+c=0$ 或 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，当 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ 时，$ab+bc+ac=0$．　……. 1 分

$\because a^2+b^2+c^2=9$ $\therefore(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=9$　　………… 2 分

$\therefore$ $a+b+c=\pm3,-3$（舍去），$\therefore a+b+c$ 的平方根是 $\pm\sqrt{3},0$．　　…………………… 1 分

三．解答题（第 13 题 6 分，第 14 题 8 分，第 15 题 10 分，第 16 题 10 分，第 17 题 12 分，第 18 题 12 分，共计 58 分）

13．解：当 $a=-1$ 时，方程变为 $-2x-8=0$，得 $x=-4$，符合要求；…………………1 分

当 $a\neq-1$ 时，设方程的两个整数根为 x_1,x_2，根据韦达定理可得

$$x_1+x_2=\frac{a^2+1}{a+1}=\frac{a^2-1+2}{a+1}=a-1+\frac{2}{a+1},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{2a^3-6}{a-1}=\frac{2(a^3+1)-8}{a+1}=2(a^2-a+1)-\frac{8}{a+1},$$　　………………………… 2 分

因为 x_1,x_2 都是整数，所以 x_1+x_2 和 $x_1\cdot x_2$ 都是整数，即 $\frac{2}{a+1}$ 和 $\frac{8}{a+1}$ 也应为整数，所以满

足条件 $a=0,1,-2,-3$． .... 1 分

当 $a=0,$ 时，原方程 $x^2-x-6=0$ 解得 $x_1=3,x_2=-2$．当 $a=1$ 时，原方程 $2x^2-2x-4=0$ 解得 $x_1=2,x_2=-1$．当 $a=-2$ 时，原方程 $-x^2-5x-22=0$．无实根;

当 $a=-3$ 时，原方程 $-2x^2-10x-60=0$，无实根； .... 1 分

综上所述当 $a=-1,0,1$ 时，方程有整数根 $x=-4$ 或 $x=3,-2$ 或 $x=2,-1$． .... 1 分

14. 解：由已知条件可得 $a^2b^2+(a+b)^2=20, ab+(a+b)=6$

设 $a+b=x, ab=y$, 则有 $x^2+y^2=20, x+y=6$ .... 2 分

联立解得 $(x,y)=(2,4)$ 或 $(x,y)=(4,2)$ .... 2 分

若 $(x,y)=(2,4)$, 即 $a+b=2$， $ab=4$，则 a,b 是一元二次方程 $t^2-2t+4=0$ 的两根，但这个方程的判别式 $\Delta=(-2)^2-16=-12<0$ 没有实数根. .... 1 分

若 $(x,y)=(4,2)$，则 $a+b=4, ab=2$，则 a,b 是一元二次方程 $t^2-4t+2=0$ 的两根，这个方程判别式 $\Delta=(-4)^2-8=8>0$ 有实数根， .... 1 分

所以 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=4\times[(a+b)^2-3ab]=40$ .... 2 分

15. 解：设方程有有理数根，则判别式为平方数，令 $\Delta=q^2-4p^2=n^2$，其中 n 是一个非负整数，则 $(q-n)(q+n)=4p^2$， .... 2 分

由于 $1\le q-n\le q+n$ 且 $q-n$ 与 $q+n$ 同奇偶，故同为偶数，因此有如下几种可能：

$$\begin{cases}q-n=2,\\ q+n=2p^2,\end{cases}\begin{cases}q-n=4,\\ q+n=p^2,\end{cases}\begin{cases}q-n=p,\\ q+n=4p,\end{cases}\begin{cases}q-n=2p,\\ q+n=2p,\end{cases}\begin{cases}q-n=p^2\\ q+n=4\end{cases},$$ .... 4 分

消去 n 解得 $q=p^2+1$，$q=2+\dfrac{p^2}{2}$，$q=\dfrac{5}{2}p$，$q=2p$，$q=2+\dfrac{p^2}{2}$， .... 2 分

对于第 1,3 种情形，$p=2,q=5$；对于第 2,5 种，$p=2,q=4$ 方程为 $x^2-4x+4=0$；他的根为 $x_1=x_2=2$.对于第 4 种情形，q 是合数（不合题意舍去），又当 $p=2,q=5$ 时，方程为 $x^2-5x+4=0$，他的根为 $x_1=1,x_2=4$，他们都是有理根. .... 2 分

16. 解：设 $x_1,x_2,...,x_{2018}$ 中有 q 个 0，r 个-1，s 个 1，t 个 2. .... 2 分

则 $\begin{cases}-r+s+2t=400\\ r+s+4t=2018\end{cases}$ ①，两式相加可得 $s+3t=1209$，故 $0\le t\le 403$． ………… 2 分

由 $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{2018}^3=-r+s+8t=6t+400$，可得

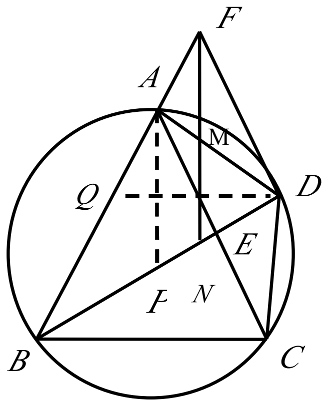
$400\le x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{2018}^3\le 6\cdot 403+400=2818$， ………………………… 2 分

由方程组①式可知：

当 $t=0, s=1209, r=809$ 时，$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{2018}^3$ 取到最小值 400； ………………………… 2 分

当 $t=403, s=0, r=406$ 时，$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{2018}^3$ 取到最大值 2818. ………………………… 2 分

17.



证明:（1）在 BE 上取一点 P，使得 $\angle BAP=\angle DAC$，

则 $\Delta BAP\cong\Delta CAD,\therefore AP=AD.$

………………………… 2 分

又

$\because AE\perp PD,\therefore \Delta ADE\cong\Delta APE,\therefore \angle PAE=\angle DAE,\therefore \angle PAE=\angle BAP=\angle DAC$， …………

$\therefore \angle BAD=3\angle DAC.$ 2 分

（2）设 $\angle DAC=\alpha$，则 $\angle BAC=2\alpha$，$\angle BAD=3\alpha$，$\angle NDM=90^\circ-\alpha$ ……………1 分

在 FB 上截取 $FQ=FD$，连接 QD,则 $BQ=BF-FQ=BF-FD$，又 $\dfrac{BF-DF}{BD}=\dfrac{CD}{AC}$，

$\therefore \dfrac{BQ}{BD}=\dfrac{CD}{AC},\therefore \Delta QBD\sim\Delta DCA$ ………………………… 1 分

$\therefore \angle QDB=\angle DAC$,又$\because \angle DBC=\angle DAC,\therefore \angle QDB=\angle DBC,\therefore QD//BC$

$\therefore \angle FQD=\angle ABC$ ………………………… 2 分

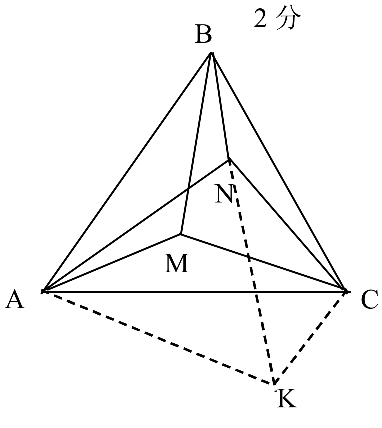
又 $AB=AC,\angle BAC=2\alpha,\therefore \angle ABC=90^\circ-\alpha,\therefore \angle FQD=90^\circ-\alpha$,又 $FD=FQ$，

$\therefore \angle BFD=2\alpha$，$\because FN$ 平分 $\angle BFD$，$\therefore \angle AFM=\alpha$ ………………………… 2 分

$\therefore \angle NMD=\angle AMF=\angle BAD-\angle AFM=3\alpha-\alpha=2\alpha$，

$\therefore \angle MND=180-\angle NMD-\angle NDM=90^\circ-\alpha=\angle MDN$

$\therefore MN=MD.$ 2 分 …………………………



18. 证明：设 K 是射线 BN 上的点，且满足$\angle BCK=\angle BMA$， ....2 分

因$\angle BMA>\angle ACB$，所以 K 在$\triangle ABC$的外部，又$\angle MBA=\angle CBK$，则$\triangle ABM\sim\triangle KBC$，

即有$\dfrac{AB}{BK}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{AM}{CK}$，由$\angle ABK=\angle MBC,\dfrac{AB}{KB}=\dfrac{BM}{BC}$，知$\triangle ABK\sim\triangle MBC$，于是

$\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{BK}{BC}=\dfrac{AK}{CM}$. .... 4 分

由$\angle CKN=\angle MAB=\angle NAC$，知 A,N,C,K 四点共圆，应用托勒密定理，有

$AC\cdot NK=AN\cdot KC+CN\cdot AK$或$AC\cdot(BK-BN)=AN\cdot KC+CN\cdot AK$，.......... 2 分

将$KC=\dfrac{AM\cdot BC}{BM},BK=\dfrac{AB\cdot BC}{BM},AK=\dfrac{CM\cdot BA}{BM}$代入，

得$AC\left(\dfrac{AB\cdot BC}{BM}-BN\right)=\dfrac{AM\cdot BC\cdot AN}{BM}+\dfrac{CM\cdot BA\cdot CN}{BM}$， .... 2 分

即$\dfrac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\dfrac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\dfrac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$. ....2 分